

iQué poco intuitivo nos resulta el azar!

Vicente Trigo Aranda



Revista Digital de ACTA
2022

Publicación patrocinada por



ACTA representa en CEDRO los intereses de los autores científico-técnicos y académicos. Ser socio de ACTA es gratuito.

Solicite su adhesión en acta@acta.es

¡Qué poco intuitivo nos resulta el azar!

© 2022, Vicente Trigo Aranda

© 2022, 

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

Se autorizan los enlaces a este artículo.

ACTA no se hace responsable de las opiniones personales reflejadas en este artículo.

INTRODUCCIÓN

En la vida diaria nos enfrentamos continuamente a la toma de decisiones, en las que juega un papel importante la incertidumbre. En general, lo más recomendable es optar por aquello que nos brinda una probabilidad más favorable a nuestros intereses, pero eso no siempre es fácil.

A lo largo de este artículo presentaré unos cuantos ejemplos que nos demostrarán empíricamente lo poco intuitivo que nos resulta el azar a los seres humanos... y mucho más cuando aparecen condiciones por medio.

Haré una exposición lo más interactiva posible. Guiándonos por la lógica y el sentido común, sin apenas aparato matemático, resolveremos varias cuestiones sencillas y, además, analizaremos interesantes casos reales... como un posible ahorro cuando es necesario hacer análisis de sangre a grandes poblaciones para detectar quienes padecen una determinada enfermedad; también un problema relacionado con un concurso televisivo que dio pie a una gran polémica; el grado de fiabilidad de las pruebas de ADN y cómo interpretar algunos resultados de las mamografías. Para terminar, nos centraremos en las jugadas en el juego de cartas por excelencia, el póker.

Como es normal, en el artículo aparecerá múltiples veces el término probabilidad. Para concretar y evitar confusiones, se sobreentiende que haremos los cálculos mediante la fórmula clásica:

$$\text{Probabilidad} = \text{Casos favorables} / \text{Total de casos}$$

Como el número de casos que cumplan la condición que estemos analizando siempre será inferior al número de casos totales, el cociente anterior siempre será menor o igual que 1. Por tanto, una probabilidad puede ser, por ejemplo, 0,63, aunque en el lenguaje cotidiano es habitual expresarla en tanto por ciento (63% en este caso).

En las ocasiones en que algo resulta muy improbable, como su probabilidad es casi nula, tendrá varios ceros tras la coma decimal. El número así escrito suele resultar difícil de leer y, por eso, se acostumbra indicar la probabilidad mediante la expresión "tantos entre tantos". Por ejemplo, nos hacemos una idea más rápida de lo extraño que es algo cuando decimos que se presenta 1 vez entre 725.000 que cuando afirmamos que su probabilidad es 0,00000137931034, ¿verdad?

Hechas estas aclaraciones previas, pasemos ya al azar.

Lo cierto es que los seres humanos no asimilamos muy bien el azar. Nuestros primeros ancestros se movían entre árboles y nuestro cerebro evolucionó a partir de ese entorno, de modo que está bien preparado para gestionar distancias y nuestro sistema visual, aunque mejorable, también es eficaz... y a las pruebas me remito, porque aún sigue en pie la especie humana.

Cuando nuestros antepasados bajaron a la sabana, les resultó muy útil para su supervivencia el ser capaces de detectar pautas y, de este modo, prever qué podía suceder. Sin darnos cuenta, nuestro cerebro maneja pautas continuamente y, de hecho, los seres humanos somos incapaces de generar secuencias aleatorias sin sesgos... Incluso visualmente tenemos suma habilidad para encontrar pautas en cualquier sitio, ya sea en forma de caras (nubes, rocas, etc.) o de figuras imaginarias (las constelaciones, por ejemplo).

Otra ventaja evolutiva de nuestra especie es la de buscar razones para todo... Si el león parece tan contento, ¿es porque ya ha comido y nos dejará tranquilos o porque piensa que seremos su comida?... Si hay una sequía que ocasiona una gran hambruna, ¿será porque algún dios se ha enfadado con nosotros y debemos hacerle algún sacrificio para contentarlo?

La cuestión es que las pautas y las razones conjugan más bien poco con el azar y, a pesar de que dejemos la sabana hace muchos miles de años, nuestro cerebro todavía no lo ha asimilado bien y, en la actualidad, seguimos en un plan parecido, buscando pautas y motivos... ¿Cuántas veces habremos escuchado la expresión *¿por qué a mí??*

Además, según parecen confirmar las resonancias magnéticas, nuestra amígdala se moviliza cuando tomamos decisiones basadas en el azar... y tengamos en cuenta que la amígdala procesa y almacena las emociones, consolida la memoria, maneja el miedo, etc. Dicho de otra manera, la amígdala no es la parte más racional de nuestro cerebro.

Salvo que tengamos una cierta preparación previa, solemos fiarnos de nuestra intuición ante la incertidumbre... y eso no siempre es lo más adecuado.

Lo cierto es que apenas interiorizamos el azar. En nuestra vida cotidiana, no lo racionalizamos y nos dejamos llevar por nuestros impulsos más primitivos. Veamos unos ejemplos:

- Analizando datos del periodo comprendido entre 1970 y 2016, la probabilidad de morir en un ataque terrorista dentro de las fronteras USA es de una entre cuatro millones... y el riesgo de terminar sin vida en el baño de casa asciende hasta una entre 725.000.
- El 7,17% de las muertes registradas entre 1998 y 2012, en 147 regiones en 16 países europeos, se atribuyeron a temperaturas no óptimas, siendo el frío más dañino que el calor por un factor de diez (6,51% frente a 0,65%).
- Según el INE, en 2020 murieron 493.776 personas. Si obviamos las enfermedades y nos fijamos en las causas externas de mortalidad (16.078), las dos más numerosas fueron suicidio (3.941) y caídas accidentales (3.605) ... y hubo un total de 289 homicidios.

Ahora bien, ¿estos datos coinciden con las percepciones que tenemos?... ¿Qué nos preocupa más, morir de una caída en el baño o de un ataque terrorista? ¿Morir de frío o de calor? ¿De qué hablan más los medios de comunicación?

Otro defecto de nuestro cerebro relacionado con el azar es la sobrevaloración que hacemos de las coincidencias. Cuando nos sucede algo anormal, tendemos a darle demasiada importancia y, en ocasiones, hasta pensamos que tiene algún significado.

Las coincidencias existen y son frecuentes, y muchas veces las recordamos, precisamente por lo sorprendentes que resultan, pero no es muy lógico sobreestimar las coincidencias. ¿Qué puedo decir? Es probable que se produzca alguna coincidencia, pero muy improbable que se dé una coincidencia en concreto... O dicho en plan trabalenguas: Los sucesos muy improbables no es probable que sucedan, pero que suceda algún suceso improbable no es nada improbable.

Un ejemplo muy ilustrativo de lo poco racionalmente que gestionamos el azar lo tenemos en la popular Lotería. Cuando le digo a alguien que es ilógico comprar décimos, porque la probabilidad de ganar es minúscula, el razonamiento que más he escuchado es: *A alguien le toca, ¿no?*

Y sí, es cierto que a alguien le toca, pero, ¿y qué?... Lo que debería interesarnos es que nos caiga el gordo a nosotros, no a otra persona.

Acertar con el gordo de la Lotería es tan manifiestamente improbable que todo el mundo acabaría por darse cuenta, tarde o temprano, de que comprar Lotería es tirar el dinero. Por ese motivo, para evitar que la gente dejase de jugar, se introdujeron premios menores y, especialmente, los reintegros... para que sigamos jugando y acabemos perdiendo todo.

No solo es que las supersticiones en las loterías estén a la orden del día, que lo están, lo peor es que interiorizamos mal el concepto de independencia. ¿Y qué es eso de la independencia? Dos sucesos se dicen independientes cuando no guardan ninguna relación y, por tanto, la probabilidad de que se cumplan los dos simultáneamente es el producto de sus respectivas probabilidades.

Por ejemplo, supongamos que la probabilidad de que una editorial acepte publicar mi libro es 0,4 y la de que decida pasarme por la peluquería es 0,6. En estas condiciones, la probabilidad que tengo de firmar el contrato con el pelo cortado es 0,24.

¿Por qué he comentado lo de la independencia? Porque conozco a varias personas que juegan siempre al mismo número en la Lotería. Su razonamiento... *Alguna vez me tocará, ¿no?*

¡Pues no!... Los sorteos (igual da que sean de la Lotería que de la Primitiva) son independientes; es decir, que los resultados de los anteriores no influyen para nada en los nuevos sorteos.

Por ejemplo, supongamos que alguien juega siempre la misma combinación a la Primitiva (dos sorteos por semana, con 52 semanas al año). Aunque esa persona lleve jugando veinte años, en cada sorteo su probabilidad de acertar es minúscula, únicamente 1 entre 13.983.816. La decisión más racional es no jugar y dejar de tirar el dinero.

¿Le interesa saber de dónde sale el número 13.983.816? Son todas las apuestas distintas que se pueden hacer en la Primitiva. Cualquiera que sepa algo de combinatoria, hallará ese número sin más que calcular 49 sobre 6.

Aunque la combinatoria es una herramienta que nos ahorra trabajo, no todo el mundo la domina, por lo que ahora haremos los cálculos sin ella, simplemente razonando.

Así, para el primer número de la apuesta tenemos 49 posibilidades, para el segundo ya solo 48, para el tercero 47 y sucesivamente. Como se eligen 6 números, el total de casos parecería ser $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$, pero debemos darnos cuenta de un detalle: una misma combinación de seis números la hemos contado tantas veces como podemos reordenarlos entre sí. Por tanto, es necesario dividir el producto anterior por las permutaciones de los seis números elegidos en cada combinación, que son $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. De ahí sale el número 13.983.816.

Claro que una cosa es plantearse lo improbable que resulta ganar el pleno en la Primitiva y otra cuestión distinta es preguntarse: ¿Qué probabilidad tenemos de acertarlo alguna vez si vamos a jugar durante, por ejemplo, veinte años?

Ponga en marcha su intuición. ¿Cuál cree que puede ser la respuesta aproximada?

Veinte años, recuerde... dos sorteos de la Primitiva por semana... ¿Ya se le ocurre algo?

Pues la probabilidad es... 0,000148732. ¡Ni siquiera llega a 1,5 entre diez mil!

Ahora veamos otro ejemplo parecido, pero con la Lotería, que solo son cien mil números, por lo que acertar el premio gordo es unas 139 veces más probable que tener el pleno en el sorteo de la Primitiva.

Supongamos que, al igual que a algunos bebés se les hace socios de un equipo de fútbol nada más nacer, a un bebé se le abona a un mismo número de Lotería durante toda su vida (90 años, por ejemplo). ¿Qué probabilidad tiene de que le toque el gordo?

De nuevo, ponga en marcha su intuición. ¿Cuál piensa que es la respuesta? Ahora son noventa años y la Lotería es más probable que la Primitiva... ¿Ya se ha decidido por un número?

Pues resulta que la probabilidad ni siquiera llega al 9%.

Los ejemplos que acabamos de ver sobre loterías son sencillos, pero tienen el inconveniente de manejar números grandes... y nuestro cerebro tiene problemas para gestionarlos (otra más de sus limitaciones). A continuación, para terminar con esta introducción, vamos con unas pruebas más manejables que nos permitirán tener una idea de lo intuitivo que nos resulta el azar.

La idea no es resolver numéricamente los problemas (se supone que su nivel es de secundaria, pero es preferible no intentarlo porque igual nos armamos un lío y se nos hunde la moral), sino encontrar una respuesta aproximada, intuitivamente.

1. En un cajón hay 10 calcetines blancos y 10 negros. A oscuras, una persona coge dos calcetines. ¿Qué probabilidad hay de que sean del mismo color?
2. En un cajón hay seis calcetines negros, cuatro azules y dos blancos. Se extraen dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
3. En una operación se estima que la probabilidad de que surja alguna complicación es del 2% con la anestesia, del 8% durante la operación y del 3% en el postoperatorio. ¿Qué probabilidad hay de que no suceda ninguna complicación en todo el proceso?
4. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?
A = "sacar al menos un 6 al lanzar 6 dados"
B = "sacar al menos dos 6 al lanzar 12 dados"
C = "sacar al menos tres 6 al lanzar 18 dados"
5. Una compañía de seguros de vida estima que la probabilidad de que una mujer sana, que hoy tiene 20 años, alcance los 70 años de edad, es 0,82; en cambio, a un hombre en las mismas condiciones, le asigna una probabilidad de 0,75.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una pareja, alcancen ambos los 70 años?
 - b) ¿Y la de que ambos fallezcan antes de alcanzar esa edad?
 - c) ¿Y la de que, a los 70 años, ella esté viuda o él viudo?
6. En una reunión hay n personas, ninguna de las cuales ha nacido en año bisiesto. ¿Cuál es el valor mínimo de n para que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea superior al 50%?
7. En una reunión hay n personas, ninguna de las cuales ha nacido en año bisiesto. ¿Cuál es el valor mínimo de n para que la probabilidad de que alguna de ellas cumpla años el mismo día que usted sea superior al 50%?
8. Dos personas quedan entre las 6 y las 7 en un lugar, pero acuerdan que la primera en llegar solo esperará a la otra a lo sumo un cuarto de hora. ¿Qué probabilidad hay de que lleguen a encontrarse?

Un inciso final. Este artículo es una muestra de lo que nos puede condicionar el formato en que escribimos. Si se fuese a publicar en papel, me las habría arreglado para poner las soluciones a las preguntas en la página trasera de esta, para evitar que se nos fuese la vista instintivamente a la respuesta. Sin embargo, como ahora el artículo se publica en pdf, esa posibilidad no existe y he optado por colocar en la última página la solución exacta a los problemas anteriores.

BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El azar nos resulta tan poco intuitivo que su evolución histórica fue muy tardía, debido a que se necesitan ciertas herramientas matemáticas para manejarlo con cierta soltura. Si retrocedemos a la antigüedad, llama la atención que los griegos, que fueron bastante buenos en el estudio de la aritmética y la geometría, con el azar no alcanzaron ese nivel ni de lejos.

También es verdad que la aritmética y la geometría son relativamente intuitivas y permiten hacer operaciones aproximadas con facilidad, como vemos en los siguientes ejemplos.

- Supongamos que nos interesa calcular la raíz cuadrada de 75; es decir, un número que elevado al cuadrado da 75. Podemos razonar que como el cuadrado de 8 es 64 y el de 9 es 81, el número que buscamos estará entre 8 y 9, y, como 75 está más cerca de 81 que de 64, podemos pensar que la su raíz cuadrada será 8,6 u 8,7 (es 8,66).
- Si nos dan un círculo, es bastante fácil situar su centro aproximadamente... e, incluso, construir un cuadrado que tenga más o menos la misma área (cuadratura del círculo).

Sin embargo, con el azar hay que hilar más fino, aunque, en mi opinión, eso no suponía un gran inconveniente para los griegos que alcanzaron altas cotas de rigurosidad (por ejemplo, en la axiomática de Euclides). ¿Qué pasaba pues? Sencillamente que la aleatoriedad quedaba lejos del interés de su sociedad, porque siempre había un motivo para todo, ya que para eso estaban los dioses del panteón griego.

¿Qué sentido tenía estudiar el azar, si cada suceso dependía de la voluntad de los dioses?... Tampoco debemos sonreírnos mucho, porque en la actualidad todavía se escuchan expresiones del tipo: "es la voluntad de Dios" o "es la voluntad de Alá".

Por lo visto (https://ddd.uab.cat/pub/tfg/2020/230960/VitaCortesMario_TFG2020.pdf) donde sí intervenía el azar era en los oráculos griegos (astragalomancia): *El que consulta al dios hace una plegaria ante la estatua, después de ello toma los dados, que se encuentran en un gran número frente a la misma, y arroja cuatro sobre la mesa. Sobre cada una de las tiradas del astrágalo tiene la explicación escrita expresamente en el tablero.*

El astrágalo, más conocido por taba, es un hueso de la pata trasera de un animal (generalmente cordero o cabra). Se utilizó hasta hace nada en todo el planeta, como equivalente o sustituto del dado. De hecho, la gente que hemos sobrepasado una determinada edad, sí hemos jugado a las tabas, en cualquiera de las múltiples modalidades que ofrecían.



Figura 1. Las cuatro caras de una taba.

¡Qué poco intuitivo nos resulta el azar!

Así como el dado tiene seis caras y, si está bien fabricado, todas ellas son equiprobables, con la taba no sucede lo mismo. Al lanzarla al aire pueden salir cuatro caras, pero no son igualmente probables ni mucho menos (basta con observar las cuatro caras en la figura anterior).

Los griegos de la antigüedad, jugaban y mucho a las tabas, como vemos en la figura inferior. La gente pudiente para dejar bien patente su poder económico, adquiría sus tabas en un material más lujoso: marfil, bronce, vidrio, etc.



Figura 2. Fragmento de Giocatrici di astragali, de Ercolano, Museo Arqueológico Nacional de Nápoles.

Cuando se jugaba con dinero, en la Grecia antigua se solía considerar la tirada más valiosa la llamada Venus, aquella en que al lanzar cuatro tabas salían todas las caras diferentes. Claro que como la probabilidad de cada cara no es la misma, había otras opciones más improbables... pero, como ya he dicho, los griegos obviaron el estudio de la probabilidad.

Por ejemplo, si suponemos que las caras más estrechas tienen un 10% de probabilidad y las otras dos un 40%, la probabilidad de la tirada Venus es fácil de calcular. Como los lanzamientos son independientes, la probabilidad de un caso sería $0,1 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,1$, pero, ¿cuántos casos hay? Estamos en lo de antes, las permutaciones de las cuatro tabas, $4 \times 3 \times 2 \times 1$. Por tanto, la probabilidad de la tirada Venus es 384 (16×24) sobre 10.000.

Hasta más de mil años después, la sociedad europea no necesitó estudiar el azar y, cuando lo hizo, todo comenzó por cuestiones de juego.

El nacimiento de la probabilidad moderna se debe a un escritor francés, Antoine Gambaud (1607-1684), conocido como el Caballero de Méré. En realidad, no pertenecía a la nobleza, pero llamaba Caballero a uno de sus personajes y, como estudió en Méré, de ahí su apelativo. Escribió varios libros de filosofía, además de una novela y otro de poesía.

El Caballero de Méré también era aficionado a las matemáticas, sobre todo, en todo lo referente al azar, ya que podría decirse que era un jugador empedernido.

En una carta que envió Pascal a Fermat (29 de junio de 1654) le comentaba un problema que le había planteado su amigo el Caballero de Méré, el conocido como Problema de los dados.

El Caballero de Méré se había percatado de que, cuando se lanzaban cuatro dados, le favorecía apostar a que saliera al menos un 6. ¿Por qué no sucedía lo mismo lanzando dos dados 24 veces, pidiendo ahora que saliera un doble 6? A él le desconcertaba que la apuesta pasara de favorable a desfavorable, a pesar de que se mantenía la proporción (4 es a 6 como 24 a 36).

Y la verdad es que lo último no tiene nada que ver con lo anterior... Un ejemplo más de lo poco intuitivo que puede resultar el azar.

El Problema de los dados, como es relativamente sencillo, podemos resolverlo sin dificultad.

Calculemos primero la probabilidad de que salga al menos un 6 en cuatro tiradas. Como justo lo contrario es que no salga ningún 6 y la probabilidad de este caso, al tratarse de cuatro sucesos independientes, sabemos que es $5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6$, basta restar ese valor a 1. Por tanto, la probabilidad de que salga al menos un 6 en cuatro tiradas es 0,5177... Y sí, resulta favorable a la larga, pues se ganarán en promedio 51 partidas de cada cien.

El cálculo de la probabilidad de que salga al menos un doble seis en 24 lanzamientos es similar, solo que ahora deberemos multiplicar $35/36$ por sí mismo 24 veces y el resultado del producto restárselo a la unidad. Como sale 0,4914... comprobamos que sí es desfavorable a la larga, pues solo se ganarán 49 partidas de cada cien.

Personalmente lo que me sorprende no es que el Caballero de Méré se liase con su razonamiento sobre el azar, sino que fuese capaz de apreciar la diferencia de probabilidad entre esas dos apuestas, porque tampoco es abismal. Para advertir experimentalmente una diferencia que ronda el 2% hay que jugar muchas, muchas partidas, ¿no cree?

Más interesante, de cara al futuro desarrollo de la probabilidad, fueron otros problemas que le planteó el Caballero de Méré a Pascal... Si el juego consistía en ganar varias rondas y, debido a la llegada de los guardias, se interrumpía el juego, ¿cómo debían repartirse el bote los jugadores en función de las rondas que llevase ganadas cada uno?

Por ejemplo, supongamos que ganase el juego quien acertase primero seis tiradas al lanzar una moneda y, cuando uno ha ganado 5 y el otro 3, tienen que salir corriendo, llevándose el bote. ¿Cómo deben repartírselo?

¿Qué opina? ¿Todo para el que más va ganando? ¿Para el primero $5/8$ y para el segundo $3/8$?

Pascal analizó el problema y observó que el segundo jugador solo podía ganar si acertaba las tres tiradas siguientes, cuya probabilidad es $1/8$ ($1/2 \times 1/2 \times 1/2$); en los restantes casos, ganaba el primer jugador. Por tanto, Pascal dictaminó que debía repartirse el bote en esa proporción: $7/8$ para el primero y $1/8$ para el segundo.

Como es fácil imaginar, enseguida se complica el asunto si, por ejemplo, inicialmente hubieran decidido que el número de tiradas necesarias para ganar el bote fuese mayor.

Y ya que he hablado de lanzamiento de monedas, una cuestión... ¿Se le ocurre cómo hacer un sorteo justo cuando la moneda está cargada? Por ejemplo, si sospechamos que es más probable que salga cara (70%) que cruz (30%), ¿podemos usar esa moneda en un sorteo equitativo?

Pues sí, basta con lanzarla dos veces y que un jugador elija cara y cruz y el otro cruz y cara. La probabilidad de ambos sucesos es exactamente la misma, 21% ($70\% \times 30\%$). ¿Y si han salido dos caras o dos cruces? Pues repetimos el proceso hasta que los dos resultados sean distintos.

ETIMOLOGÍAS

Antes de pasar a comentar otros ejemplos en los que interviene el azar y que considero aún más interesantes que los anteriores, siempre le viene bien a cualquier escritor conocer la etimología de las palabras, ¿verdad?

Según informa la RAE, la palabra *azar* deriva del árabe hispánico *azzahr*, y este del árabe *zahr*, dado (literalmente "flores"). Su primer significado es "casualidad, caso fortuito", pero el tercero es: "En los juegos de naipes o dados, carta o dado que tiene el punto con que se pierde".

¿Y qué relación guardaba la mala suerte en los dados con el azar?

Pues resulta que los árabes tallaban una pequeña flor (*azahar*, según la RAE, es "la flor blanca típica del naranjo, limonero y cidro") y en uno de sus juegos de dados, se perdía cuando salía la cara que llevaba grabada esa flor.

Claro que los dados eran tecnología punta en aquella época (pensemos, por ejemplo, en el siglo XIII). Como todavía se seguía jugando con tabas, también se tomó la costumbre de tallar la flor en uno de los lados de la taba (el que daba suerte, por lo general).

Si es verdad lo que se dice en la figura inferior, la carne era la que hacía ganar. Y es que, para la RAE, carne también es: "En el juego de la taba, parte que esta tiene algo cóncava, que forma una figura similar a una S y es contraria a la parte lisa".



Figura 3. <https://www.diariodeburgos.es/noticia/zb4379069-c036-fd39-0d797d909b128cc5/201505/venga-me-queda-dinero-va-taba->

También, según la RAE, culo es "en el juego de la taba, la parte más plana, opuesta a la carne". Como se tallaba una flor en el culo de la taba, ¿es posible que de ese juego derive la expresión "tener una flor en el culo", como sinónimo de tener mucha suerte?... Aunque en las normas de la figura siguiente, se lee que la posición de culo da ganador... al resto de apostantes.

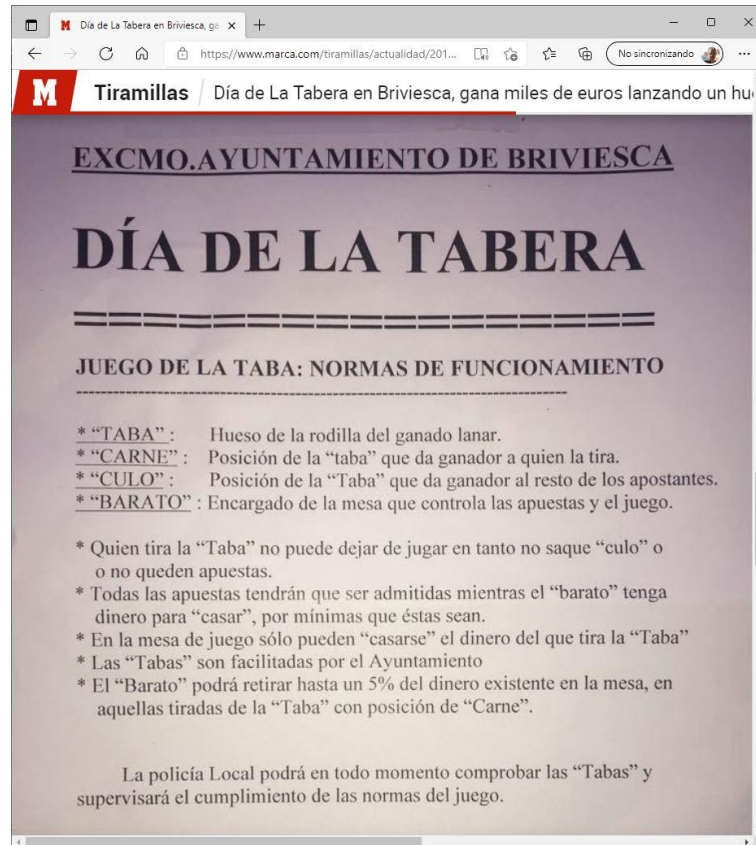


Figura 4. <https://www.marca.com/tiramillas/actualidad/2018/05/08/5af16c43268e3ed1368b458f.html>

Con el paso del tiempo, el juego de azar dejó de estar restringido a los dados o las tabas y el nombre se extendió a cualquier tipo de juego en el que la suerte fuera el principal ingrediente.

En nuestro idioma hay muchos sinónimos de azar, pero uno bastante común es aleatorio (según la RAE: "Que depende del azar", procede del latín *alea*: juego de azar, azar, suerte). Inolvidable la frase *Alea Jacta Est* (La suerte está echada), atribuida a Julio César cuando cruzaba el Rubicón.

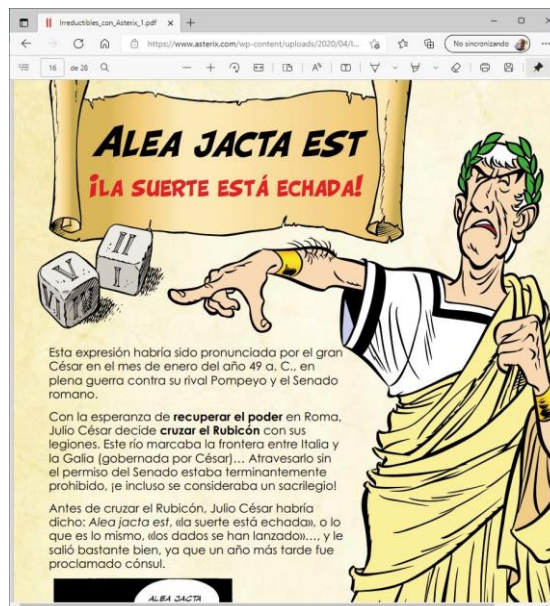


Figura 5. La frase aparece en varios Asterix (https://www.asterix.com/wp-content/uploads/2020/04/Irreductibles_con_Asterix_1.pdf)

La palabra *azar* pasó al inglés casi sin cambios en el término *hazard*. Sin embargo, en informática se maneja más la palabra *random*, que deriva del francés antiguo *randon* (llevar prisa, actuar con ímpetu, etc.; sobre todo al galopar, correr, etc.). A principios de 1300 pasó con ese sentido al inglés, para en el siglo XVII transformarse en algo sin objetivo ni propósito.

Y, para terminar con las referencias etimológicas, la palabra *probabilidad*, según la RAE admite tres acepciones y la última es a la que aludimos en este artículo: "En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles".

Probabilidad deriva del latín, *probabilitas*, y originalmente este término aludía a la confianza que se podía tener en un testigo (la primera acepción de la RAE es, precisamente, "verosimilitud o fundada apariencia de verdad"). De hecho, en nuestro idioma *probidad* equivale a *honradez*.

ANÁLISIS MÉDICOS POR GRUPOS

Supongamos que nos interesa saber qué gente padece una determinada enfermedad que puede detectarse con un análisis de sangre. Si la población que estamos estudiando es amplia, quizás consigamos un ahorro de tiempo y dinero si, en lugar de hacer análisis de sangre individuales, juntamos la sangre de n personas y hacemos un único análisis.

Si todas están sanas, habrá bastado con solo un análisis en lugar de n individuales; en cambio, si se detecta la enfermedad en la mezcla, se deberá proceder a los análisis individuales, por lo que en total se acabarán haciendo $n+1$ análisis.

¿Qué opina? ¿Le parece una idea interesante?

A poco que pensemos en el asunto, enseguida resulta evidente que, si la probabilidad de tener la enfermedad es alta, el sistema será ineficaz. Sin embargo, cuando la enfermedad es muy poco frecuente, quizás sí que sea útil el sistema y no parece mala idea estudiarlo, ¿verdad?

Lo cierto es que esta propuesta de hacer análisis de sangre por grupos no es ninguna novedad. En EEUU, durante la II Guerra Mundial, se vieron ante la necesidad de examinar médicamente a millones de reclutas. ¿Cómo podían hacer los análisis de sangre con el menor coste posible en el caso de la sífilis (1% de la población enferma)?... Pues agrupándolos.

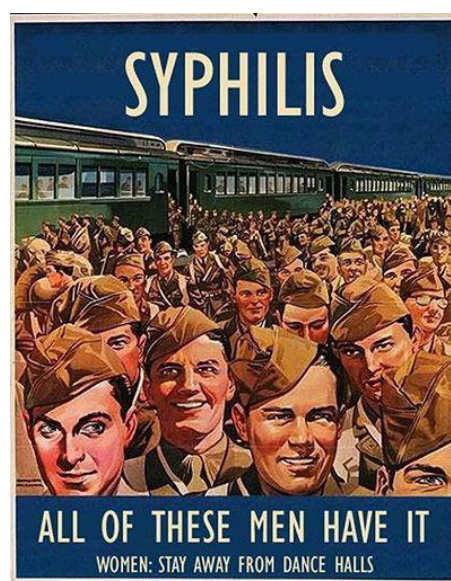


Figura 6. Antes de la Segunda Guerra Mundial, en los EEUU la sífilis era la cuarta causa de muerte, tras la tuberculosis, la neumonía y el cáncer.

¿Agrupar los análisis de sangre ahorra tiempo y pruebas? Personalmente, no me atrevería a decir nada, antes de hacer los cálculos, pero como el artículo trata de la intuición y el azar, ¿por qué no dar una respuesta a bote pronto, suponiendo, por ejemplo, que agrupamos la sangre de cien reclutas en cada ocasión?

¿Cuál cree que sería el número de análisis necesarios en promedio? Recuerde, cien personas en cada grupo y una probabilidad del 1% de tener la enfermedad.

¿Ya tiene una respuesta? Pues, como los cálculos no son tan complicados, vamos a encontrar ese valor exacto.

Solo hay dos opciones mutuamente excluyentes: que ninguno de los reclutas padezca sífilis, en cuyo caso nos bastaría con un único análisis para confirmarlo, o que alguno tuviese sífilis, que nos obligaría a hacer los cien análisis individuales más el anterior conjunto.

Podemos suponer que los dos sucesos (estar enfermo o no) son independientes para todos los reclutas, porque el examen se les hace nada más llegar al campamento. En caso de que llevasen tiempo conviviendo, quizás debería ponerse en tela de juicio esa independencia.

La probabilidad de que los cien reclutas examinados estén sanos, como son independientes, será el producto de sus probabilidades. Si la de estar enfermo es 1/100, la de estar sano será 99/100; por tanto, elevamos a cien ese número con la calculadora y nos saldrá 0,366032341.

¿Y cuál es la probabilidad de que alguno de los cien reclutas esté enfermo? Pues, como es justo lo contrario de lo anterior, será 1 menos el valor que acabamos de calcular; es decir, 0,633967659.

Por consiguiente, el número de análisis esperado sería: $1 \times 0,366032341 + 101 \times 0,633967659 = 64,3967659$

Es decir, si agrupamos los análisis de sangre de cien en cien, es de esperar que necesitaremos algo menos de 65 análisis, con lo cual un cierto ahorro sí obtenemos, ¿verdad?

Ahora bien, ¿es posible averiguar el número n de personas que deben conformar cada grupo si queremos maximizar el ahorro?

Posible, desde luego, pero es un tanto engorroso analizar manualmente todos los posibles casos; aunque con el ordenador no cuesta mucho.

En el caso concreto de la sífilis, el ejército de EEUU decidió agrupar los análisis de once en once. Repitiendo un proceso similar al anterior, calcularemos el número de pruebas esperable:

$$1 \times 0,895338254 + 12 \times 0,104661746 = 2,151279203$$

En otras palabras, en lugar de hacer los 11 análisis individuales, les bastó con hacer solo dos y algo... ¡Un ahorro del 80%!

En la siguiente tabla muestro el valor de n , que minimiza el número de pruebas necesarias, en función de algunos valores de p (probabilidad de no padecer la enfermedad).

p	0,7	0,8	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
n	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	8	11
ahorro	1%	18%	41%	44%	47%	50%	53%	57%	62%	67%	73%	80%

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

En el muy recomendable libro *El andar del borracho* de Leonard Mlodinow, se comentan múltiples ejemplos de probabilidad y ahora quiero detenerme en uno de ellos, que es todo un clásico, ya que considero que ilustra bien lo poco preparado que está nuestro cerebro para gestionar el azar.

Y es que, cuando la probabilidad condicionada entra en juego, las cosas no son nada intuitivas. ¿Y qué es eso de la probabilidad condicionada? Pues aquella en la que estudiamos un suceso cuando se produce también otro que guarda relación con él.

Este ejemplo en concreto alude a un juego muy famoso de la televisión americana (*Let's make a deal*), que ha sido adaptado en muchos países. Basándose en ese programa, el estadístico Steve Selvin planteó el siguiente problema en la revista *American Statistician* (1975).

Suponga que está en un programa de juegos y le dan a elegir entre tres puertas: detrás de una puerta hay un automóvil; detrás de las demás, cabras. Escoge una puerta (por ejemplo, la número 1) y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra puerta, (por ejemplo, la número 3), que tiene una cabra. Luego le pregunta: "¿Quiere elegir la puerta número 2?". ¿Conviene cambiar la elección?

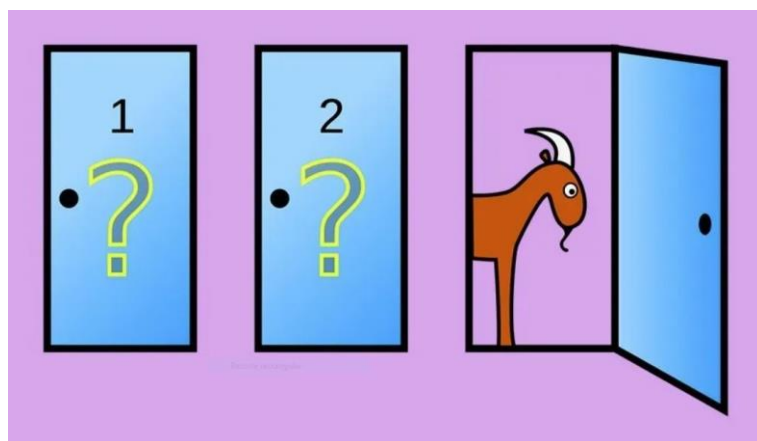


Figura 7. Problema de Monty Hall, por alusión al nombre del presentador del concurso.

Una breve pausa... ¿Cuál sería su respuesta?

¿Cambiaría de puerta o no? ¿Cree que tiene algún sentido cambiar de elección?

¿Ya ha tomado una decisión? Pues, entonces, seguimos adelante.

Este problema pasó desapercibido hasta que un lector se lo planteó a Marilyn vos Savant en su sección de la revista *Parade* (todavía sigue colaborando en la publicación, ahora en forma online: <https://parade.com/ask-marilyn/>). En ella se indica que Marilyn vos Savant figura en el Salón de la Fama del Libro Guinness de los Récords Mundiales como la persona con el cociente intelectual más alto registrado y que su primera columna *Ask Marilyn* apareció en *Parade* en 1986.

La respuesta que dio Marilyn en su columna (se reproduce en la página siguiente), provocó un alboroto mediático, porque afirmó que, cuando el presentador abría una puerta tras la que hay una cabra, era preferible cambiar de elección... (si queremos llevarnos el coche, en lugar de una cabra, claro está).

Marilyn recibió miles de cartas criticando esa respuesta y muchas de ellas eran de matemáticos escandalizados. Se dice que incluso el gran Paul Erdős se confundió con este problema.

Y es que, como ya he repetido varias veces, el azar es poco intuitivo.

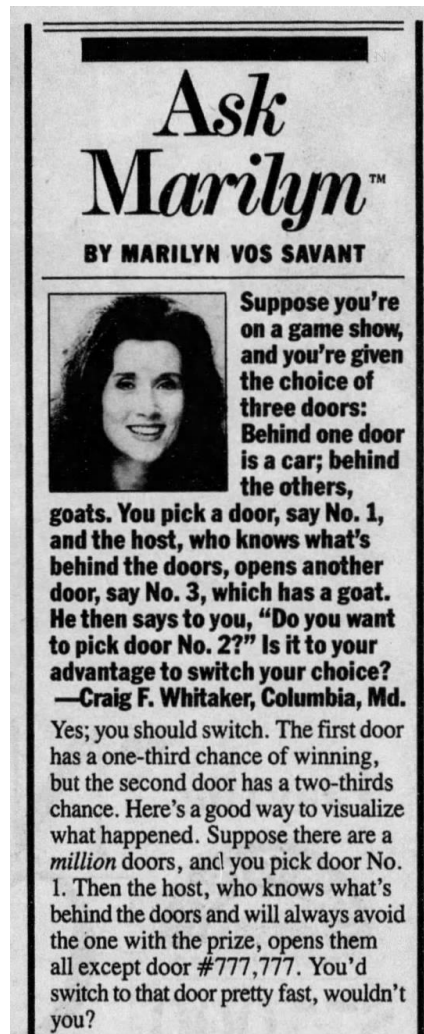


Figura 8. Columna de Marilyn vos Savant.

En la mitad inferior de su columna, Marilyn vos Savant explica como obtiene el resultado citado:

Sí, debería cambiar. La primera puerta tiene un tercio de posibilidades de ganar, pero la segunda puerta tiene dos tercios de posibilidades. He aquí una buena manera de visualizar lo que sucede. Supongamos que hay un millón de puertas y elige la puerta número 1. Entonces el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas y siempre evitará la que tiene el premio, las abre todas excepto la puerta número 777.777. Cambiaría a esa puerta bastante rápido, ¿no?

¿Todavía no le ha quedado suficientemente claro?

Quizás lo más sencillo sea hacer una tabla con todos los casos posibles, suponiendo que hemos elegido inicialmente la puerta 1 y que el presentador abre una puerta tras la que hay una cabra.

Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Premio si no cambiamos	Premio si cambiamos
Coche	Cabra	Cabra	Coche	Cabra
Cabra	Coche	Cabra	Cabra	Coche
Cabra	Cabra	Coche	Cabra	Coche

Por tanto, si cambiamos de puerta nuestra probabilidad de ganar el coche se duplica (2 sobre 3, en lugar de 1 sobre 3), tal y como afirmó Marilyn vos Savant.

ANÁLISIS DE ADN

Todo el mundo sabe, gracias a las series y las películas, que la identificación mediante el ADN es prácticamente una certeza absoluta, ¿verdad?

Sin embargo, en la realidad esa afirmación puede flaquear un poco. Me explico.

Por un lado, están los fallos que pueden producirse al recoger las muestras; aunque se siga el protocolo al pie de la letra, siempre caben los errores humanos y/o la contaminación accidental. Por otro lado, tampoco podemos descartar las equivocaciones durante el procesamiento de las muestras en el laboratorio.

No he logrado encontrar estadísticas sobre los puntos anteriores, pero Leonard Mlodinow afirma en su libro *El andar del borracho: La estimación del índice de error total debido a causas humanas varía, pero muchos expertos lo sitúan alrededor del 1%*.

Vamos, que la certeza absoluta de antes queda un poco en el alero.

Y no descarto que Leonard Mlodinow se quedase corto. ¿Por qué hago esta apostilla? Pues por los dos ejemplos que comento a continuación... y seguro que hay unos cuantos más.

En la siguiente dirección podemos encontrar una breve guía, muy interesante, que explica cómo interpretar la genética forense. En ella, entre otras muchas cosas, se cita el caso de Adam Scott, un ejemplo ya clásico de contaminación accidental de las muestras en el laboratorio.

https://senseaboutscience.org/wp-content/uploads/2019/04/SaS-ForensicGenetics-spanish-translation-WEB-spreads-13_03-amend.pdf

Otro ejemplo que dio mucho que hablar hace años, sobre errores en el Laboratorio Criminalístico del Departamento de Policía de Houston podemos leerlo, entre otros sitios, en:

<https://www.theatlantic.com/magazine/archive/2016/06/a-reasonable-doubt/480747/>

Si dejamos de lado los posibles errores humanos, ¿qué fiabilidad ofrece el análisis de ADN?

Primero, averigüemos cómo se realiza. En la *Guía para el uso forense del ADN*, se indica:

<https://www.mjusticia.gob.es/es/ElMinisterio/OrganismosMinisterio/Documents/1292430976691-Guia-para-el-uso-forense-del-ADN.pdf>

En la actualidad, todas las instituciones que registran perfiles en la base de datos de ADN cumplen con este estándar de 12 regiones STR y en la mayoría de las instituciones se analizan hasta 21 marcadores STR de forma simultánea en cada una de las muestras.

Los STR-Y, por su forma de herencia patrilínea, son también marcadores de ADN recomendados para estudios de parentesco entre varones en la identificación de personas desaparecidas y restos humanos en muy diversas situaciones.

Tras leer lo anterior, quienes no sabemos mucho de genética seguramente nos quedaremos *in albis*. Sin embargo, si lo traducimos a números, quizás eso cambie un poco.

Vayamos, por ejemplo, a la siguiente dirección:

http://biomodel.uah.es/epb/human_bio/activities/blackett2/str_codis.html

En ella se indica que, para analizar los perfiles de ADN sobre polimorfismos STR (*Short Tandem Repeat*, repeticiones cortas en tándem), el científico Bob Blackett creó un perfil para los 13 loci genéticos básicos de la base de datos nacional de los Estados Unidos, CODIS (*Combined DNA Index System*, sistema combinado de indexación de ADN):

Locus	D3S1358	vWA	FGA	D8S1179	D21S11	D18S51	D5S818
Genotipo	15, 18	16, 16	19, 24	12, 13	29, 31	12, 13	11, 13
Frecuencia	8.2%	4.4%	1.7%	9.9%	2.3%	4.3%	13%

Locus	D13S317	D7S820	D16S539	TH01	TPOX	CSF1PO	AMEL
Genotipo	11, 11	10, 10	11, 11	9, 9.3	8, 8	11, 11	X Y
Frecuencia	1.2%	6.3%	9.5%	9.6%	3.52%	7.2%	(hombre)

Si dos muestras coinciden en los 13 loci, es prácticamente seguro que ambas proceden de la misma persona (*la frecuencia de su perfil sería de uno entre 7.700 billones*).

Sin embargo, en caso de que se haya cometido un delito, aunque alguien sea identificado por el ADN, ese detalle no significa que necesariamente sea culpable. En otras palabras, que el ADN de una persona esté en un sitio, no quiere decir que obligatoriamente la persona haya estado allí.

Si le hemos prestado una prenda de ropa a otra persona, es muy probable que vaya dejando a su paso minúsculos restos de nuestro ADN. A veces basta con un simple apretón de manos, para que la otra persona lleve consigo nuestro ADN a una superficie (al mango del cuchillo clavado en un cadáver, por ejemplo).

De todas formas, el ADN no resulta útil solo para condenar, sino también para detectar falsos culpables. Por ejemplo, la organización Innocence Project, analiza las muestras de ADN usadas como pruebas condenatorias en procesos judiciales desde mediados de los años noventa y, hasta ahora, ha logrado casi 200 exoneraciones.

<https://innocenceproject.org/>

Bueno, en cualquier caso, parece que lo relativo a la utilidad del ADN ya está claro, ¿verdad?

Pues yo no diría tanto. Cuando entran por medio las probabilidades, nos encontramos dentro de un campo minado, porque, como ya he dicho varias veces, a los seres humanos se nos escapan de alguna manera.

Supongamos, por ejemplo, que se analiza un fragmento de ADN y encontramos un genotipo que coincide con el del acusado... y que solo posee una persona entre cien.

Si yo fuese el fiscal, podría hacer el siguiente razonamiento: Solo hay una posibilidad entre cien de que la muestra proceda de otra persona; por consiguiente, la probabilidad de que el acusado sea culpable es del 99%.

¿Qué opina? ¿Está de acuerdo?

Ahora bien, si yo fuese el abogado defensor, argumentaría (suponiendo que el crimen se cometió en una gran ciudad): Hay alrededor de medio millón de personas en la ciudad que podrían haber

cometido el delito. Como el 1% de 500.000 es 5.000, la probabilidad de que mi defendido sea culpable es de 1 entre 5.000.

¿Ya está más claro?

Menudo lio, ¿verdad? Como puede imaginar, son erróneos los dos razonamientos anteriores, aunque mucha gente los vaya aceptando como correctos mientras los desarrollamos.

Para analizar apropiadamente las conocidas como la falacia del fiscal y la falacia de la defensa, hay que acudir a la probabilidad condicionada, al teorema de Bayes en concreto, que es un tema que sale fuera del objetivo de este artículo.

No obstante, si desea leer un análisis de la falacia del fiscal y también de otra muy interesante, la falacia de la observación del jurado, puede acudir al siguiente artículo:

<https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2013n06.pdf>

MAMOGRAFÍAS

Por el momento, la técnica más común para detectar cáncer de mama es la mamografía, pero no es una técnica perfecta y pueden darse falsos positivos y falsos negativos... y saber interpretar esos resultados no siempre resulta sencillo para algunas personas.

En el recomendable libro de Steven Strogatz, *El placer de la X*, comenta, entre otros muchos ejemplos, un estudio de Gigerenzer en el que pidió a doctores de Alemania y Estados Unidos que estimaran la probabilidad de que una mujer tuviera realmente cáncer de pecho si su mamografía había salido positiva.

Según el libro citado, a los doctores se les dieron los siguientes porcentajes: La probabilidad de que las mujeres del estudio tengan cáncer de mama es 0,8%; si no tiene cáncer de mama, la probabilidad de tener una mamografía positiva es del 7%; la del falso negativo es un 10%.

Con estos datos, si una mujer tiene una mamografía positiva, ¿qué probabilidad existe de que realmente tenga cáncer de mama?

Gigerenzer hizo la pregunta a veinticuatro doctores alemanes y ocho de ellos pensaron que la probabilidad era del 10% o menos; otros ocho dijeron el 90% y los ocho restantes optaron por cifras entre el 50% y el 80% por ciento. En cuanto a los médicos estadounidenses, casi todos (el 95%) estimaron que la probabilidad de padecer cáncer de mama rondaba el 75%.

¿Cuál es su opinión?

Omito las explicaciones, que sí están en el libro *El placer de la X*, y me limito a dar la respuesta correcta: 9%.

Claro que ese valor de 9% solo es válido con los parámetros iniciales. Según el artículo siguiente, las probabilidades de falsos positivos (FP) y falsos negativos (FN) en las mamografías varían un tanto con respecto a los porcentajes del estudio anterior.

<https://www.elsevier.es/es-revista-medicina-familia-semergen-40-articulo-el-eterno-problema-falsos-positivos-S1138359316001222>

La tasa de resultados FP fue de 121,2 por 1.000 mujeres cribadas y la tasa de recomendaciones para practicar pruebas de imagen adicionales de 124,9 por 1.000 mujeres, siendo más altas entre las mujeres entre 40-49 años de edad y disminuyendo a medida que la edad aumentaba. Las

tasas de resultados FN fue de 1,0 a 1,5 por 1.000 mujeres cribadas y las tasas para realizar una biopsia ulterior de 15,6 a 17,5 por 1.000 mujeres y no varió significativamente con la edad.

Si utilizamos estos porcentajes para responder la pregunta anterior, ¿qué probabilidad existe de tener cáncer de mama ante una mamografía positiva?

¿Cuál es su opinión?

Con esos datos, el valor ronda el seis por ciento.

Sin embargo, tampoco parece haber unanimidad en los porcentajes reales de los falsos positivos, como podemos comprobar visitando las siguientes direcciones:

- <https://www.cancer.gov/espanol/tipos/seno/pro/deteccion-seno-pdq>. Alrededor del 9,5% de las mujeres tendrán una prueba con resultado positivo falso. Cerca del 50% de las mujeres que se someten a exámenes de detección anuales durante 10 años en los Estados Unidos obtendrán un resultado positivo falso.
- <https://www.consumerreports.org/es/cuando-debes-hacerte-una-mamografia/>. Según el USPSTF, entre 10,000 mujeres de 60 a 69 años, 808 recibirán un resultado falso positivo después de una prueba de detección.
- <https://www.radiologyinfo.org/es/info/mammo>. Del 5% al 15% de los mamogramas de exploración requieren de mayor evaluación. Se estima que una mujer que se realizó mamogramas anuales entre los 40 y 49 años cuenta con una probabilidad del 30% de tener un mamograma con resultado falso positivo en algún punto durante esa década y aproximadamente una probabilidad del 7 al 8% de realizar una biopsia de mamas dentro del período de 10 años.

En el excelente libro de John Allen Paulos, *El hombre anumérico*, también comenta este tema y escribe algunas cosas ciertamente interesantes:

Un dato muy citado es que una de cada once mujeres contraerá cáncer de mama. Sin embargo, esta cifra puede inducir a error, pues sólo vale para una muestra imaginaria de mujeres que vayan a llegar a los ochenta y cinco años y para las que la incidencia de contracción del cáncer de mama, a cualquier edad, coincida con la tasa de incidencia actual para esa edad. Sólo una minoría de mujeres llega a los ochenta y cinco años, y las tasas de incidencia son variables, siendo mayores con la edad.

A los cuarenta años, aproximadamente una mujer de cada mil contrae cáncer de mama anualmente, mientras que, a los sesenta, la tasa aumenta a una de cada quinientas. Una mujer típica de cuarenta años corre un riesgo aproximado del 1,4 por ciento de coger la enfermedad antes de los cincuenta, y un 3,3 por ciento de contraerla antes de los sesenta. Exagerando un poco, la cifra «una de cada once» es un poco como decir que a nueve de cada diez personas les saldrán manchas en la piel con la edad, cosa que no ha de ser un motivo de preocupación importante para quienes tengan treinta años.

Otro ejemplo de dato estadístico correcto y, sin embargo, mal interpretado es el hecho de que las enfermedades cardíacas y el cáncer son los dos principales asesinos de los Estados Unidos. No cabe duda de que es verdad, pero según los Centros de Control de Enfermedad, las muertes accidentales —por accidente de tráfico, envenenamiento, caída, ahogo, incendio y accidente con armas de fuego— son la causa de más años de vida potencial perdidos, pues la media de edad de estas víctimas es considerablemente inferior a la de las víctimas del cáncer y las enfermedades cardíacas.

EL JUEGO DEL PÓKER

Con los ejemplos que hemos visto hasta el momento, creo que ya ha quedado bastante claro que la intuición y el azar no casan demasiado bien. ¿no cree?

Donde sí se supone que se aplica perfectamente el cálculo de probabilidades es en los juegos de cartas, entre otras cosas, para asignar valor a las diferentes jugadas. Así, conforme más improbable es una jugada, más valiosa se considera.

Sin embargo, en ocasiones uno se lleva una sorpresa donde menos se lo espera... pronto sabrá por qué lo digo.

Ahora, para terminar, voy a centrarme en el juego de cartas más famoso, el póker o póquer que, según la RAE, es un "juego de naipes con baraja francesa, en el que se reparten cinco cartas a cada jugador, se hacen apuestas y descartes, y gana quien reúne la combinación superior entre las varias establecidas".

La baraja francesa consta de 52 cartas agrupadas en cuatro palos: corazones, diamantes, picas y tréboles. La numeración de las trece cartas de cada palo va de 1 (as) a 10, seguidas de J (sota), Q (reina) y K (rey).

Independientemente de la modalidad de póker a la que juguemos (¡y hay muchas modalidades!), siempre el valor de las diferentes jugadas lo establece la probabilidad de cada una de ellas. Para averiguar cuántas manos de cinco cartas hay en el póker, haremos los cálculos manualmente, sin utilizar las herramientas de la combinatoria, al igual que hicimos en el caso de la Primitiva.

En una mano de póker, la primera carta puede ser cualquiera de las 52 cartas de la baraja; para la segunda ya solo nos quedan disponibles 51; para la tercera 50 y 49 y 48 para las otras dos. Por consiguiente, bastará con multiplicar esos cinco números. Pero el resultado, 311.875.200, no es el valor que estamos buscando, porque una misma mano nos aparecerá muchas veces, tantas como podemos permutar entre sí las cinco cartas... que es $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Por tanto, el número de manos distintas que hay en el póker es $311.875.200 / 120 = 2.598.960$.

Ahora veamos cómo se asigna valor a las diferentes jugadas y calcularemos la probabilidad de algunas de ellas.

- La jugada más valiosa es Escalera de color (*Straight flush*) en la que las cinco cartas son del mismo palo y consecutivas; la más pequeña es As, 2, 3, 4, 5 y la mayor 10, J, Q, K, As (*Escalera real*). En cada palo se pueden formar pues solo diez escaleras y, como hay cuatro palos, en total hay solo 40 Escaleras de color (por tanto, la probabilidad de tener Escalera de color sería $40 / 2.598.960 = 0,001539\%$)
- La siguiente jugada más valiosa es Póker, que consta de cuatro cartas con la misma numeración (por eso, en inglés se denomina *Four of a Kind*); por ejemplo, 2, 2, 2, 2, 7. ¿Cuántos Póker de ases diferentes hay? Como sólo queda una carta por repartir y hay 48 disponibles, habrá 48 Póker de ases distintos. Y como tenemos 13 cartas distintas en cada palo, el número total de jugadas de Póker posibles será: $13 \times 48 = 624$.
- La jugada Full (*Full house*) consiste en tener un trío y una pareja; por ejemplo, J, 2, 2, 2, J. Como no es cuestión de hacer cálculos sin parar, indico directamente el número de casos posibles: 3.744.

- La siguiente jugada es Color (*Flush*), formada por cinco cartas del mismo palo que no sean consecutivas (porque entonces sería Escalera de color). A pesar de que el nombre de la jugada alude al color de las cartas, olvidémonos de si son rojas o negras, deben ser las cinco cartas o picas o corazones o diamantes o tréboles. En total las jugadas de Color son 5.108.
- Escalera (*Straight*) precisa que las cinco cartas sean consecutivas y no todas ellas deben ser del mismo palo (entonces sería Escalera de color). Hay 10.200 Escaleras diferentes.
- La jugada Trío (*Triple*) consta de tres cartas con la misma numeración y las otras dos distintas entre sí; por ejemplo, 6, 6, 6, K, 4. En total, hay 54.912 tríos.
- Dobles parejas (*Two Pair*) consta de dos cartas con una misma numeración, otras dos también con la misma numeración y distinta de las primeras, y la restante carta con numeración distinta de todas las anteriores; por ejemplo, 5, 5, A, A, 7. Hay 123.552.
- Por último, en la jugada de Pareja (*Single Pair*) hay dos cartas de la misma numeración, y las demás distintas, tanto entre ellas como de las primeras; por ejemplo, 6, 3, J, J, 9. Parejas simples hay 1.098.240 (su probabilidad es 42,2569%).

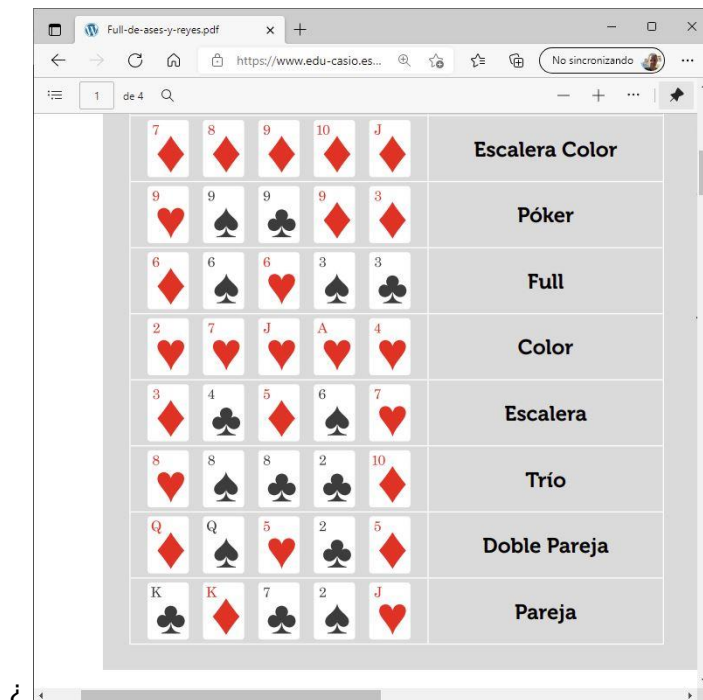


Figura 10. Ejemplos de las diferentes jugadas del póker (<https://www.edu-casio.es/wp-content/uploads/2020/03/Full-de-ases-y-reyes.pdf>)

Cuando juegan al póker cuatro o menos personas, pueden descartarse las cartas más bajas para así favorecer la aparición de jugadas más altas y que haya más tensión en la partida.

Por ejemplo, en <http://enciclopedia.us.es/index.php/P%C3%B3quer> se indica:

- Con 7 jugadores han de emplearse las 52 cartas del mazo, es decir, la baraja completa.
- Con 6 jugadores conviene descartar los doses y los treses (baraja de 44 cartas).
- Con 5 jugadores pueden descartarse además los cuatros o incluso los cincos (baraja de 36 cartas).

¡Qué poco intuitivo nos resulta el azar!

- Con 4 jugadores o menos conviene descartar los doses, los treses, los cuatros, los cincos y los seises (baraja de 32 cartas).

Supongamos que decidimos jugar al póker con 40 cartas, quitando doses, treses y cuatros. En este caso, ¿se mantiene el orden de valor especificado en las jugadas anteriores?

Pues sí, salvo con una excepción... Con 40 cartas, hay 658.008 manos posibles; de ellas, puede haber 980 que sean Color y 2.160 que sean Full, por tanto, Color debe valer más que Full.

En la tabla siguiente se exponen todas las jugadas en orden, según que usemos 52 o 40 cartas.

52 cartas	2.598.960 manos	40 cartas	658.008 manos
Escalera de color	40	Escalera de color	28
Póker	624	Póker	360
Full	3.744	Color	980
Color	5.108	Full	2.160
Escalera	10.200	Escalera	7.140
Trío	54.912	Trío	23.040
Dobles parejas	123.552	Dobles parejas	51.840
Pareja	1.098.240	Pareja	322.560

En un librito de una afamada empresa fabricante de naipes, explicando cómo se juega al póker, se habla de la jugada Cinco figuras, a la que le asigna un valor inferior al Trío y superior a las Dobles parejas. Dice textualmente:

Que las 5 cartas sean figuras. El as se considera como figura para esta jugada. Ejemplo, J, Q, Q, A, K... Esta jugada no es internacional, pero está admitida en España.

En algunos sitios web (<http://enciclopedia.us.es/index.php/P%C3%B3quer>) también se alude a esta mano tan peculiar:

Cinco figuras (o simplemente Figuras): No todos los jugadores ni todos los países admiten esta jugada... Jugando con más de 40 cartas se considera que tiene un valor superior al Trío, mientras que, si se juega con 40 cartas o menos, vale menos que un Trío.

¿En qué quedamos? ¿Figuras debería valer más o menos que el Trío?

Pues, ¿qué puedo decir? Al tratarse de una jugada no aceptada internacionalmente, podemos darle a Figuras el valor que nos dé la real gana, igual que si nos inventamos cualquier jugada nueva: pares, múltiplos de tres, escaleras a saltos, etc.

Sin embargo, a poco que supiésemos echar unas cuentas, sabríamos en qué posición debería ir, en función de su probabilidad... y no es justo encima o debajo de Trío.

Si lo desea puede entretenerse haciendo los cálculos y comprobará que Figuras debería valer más que Color cuando se juega con 52 cartas y más que Escalera, cuando solo se juega con 40 cartas.

En resumen. No es solo que el azar nos resulte poco intuitivo, es que acabamos de ver que puede resultar engorroso para mucha gente a la hora de hacer sencillos cálculos.

Soluciones de los problemas planteados en la página 4:

1) $9/19 = 47,36\%$

2) $1/3 = 33,3\%$

3) $87,4552\%$;

4) $p(A) = 0,6651$, $p(B) = 0,6187$, $p(C) = 0,5973$

5) a) $61,5\%$; b) $4,5\%$; c) 34%

6) 23

7) 253

8) $7/16 = 43,75\%$